Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

4. filtrace a markovské časy

1. posouzení spojitosti filtrace
2. posouzení, zda je náhodný čas markovský vzhledem ke zvolené filtraci

---

1. Nechť $X_t, t \in T$ je zleva spojitý proces. Ukažte, že filtrace $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$ je zleva spojitá.

2. Nechť $T = [0, \infty)$. Ukažte, že existuje zprava spojitý proces $X = (X_t, t \in T)$ takový, že filtrace $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ není zprava spojitá.

3. Rozhodněte, zda existuje spojitý proces, který generuje netriviální nespojitou filtraci.

4. Buď $N = (N_t, t \geq 0)$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Rozhodněte, zda $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$ je zleva či zprava spojitá filtrace.

   (b) Ukažte, že $\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^N \cup \mathcal{N})$ je spojitá filtrace, kde $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} : P(A) = 0\}$.[1]

   (c) Rozhodněte, zda N_t je $\mathcal{F}_{t\uparrow}$-adapovaný proces či $\mathcal{G}_{t\uparrow}$-adapovaný.

5. Nechť $0 < X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[x>0]}$. Označme $\tau_n = \sum_{k=1}^n X_k$ a $N_t = \sum_{k=1}^\infty 1_{[\tau_k \leq t]}$ a $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t), t \geq 0$. Rozhodněte, zda jsou následující časy

   (a) $\tau_1, \tau_2, X_1, X_2, 2X_1, X_1 + 2X_2$ markovské vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t^N, t \geq 0$.

   (b) $X_1/2, \tau_1 \wedge 2, \tau_2 \vee 3, \tau_1 \vee (\tau_2 - 1), \tau_1 \wedge (\tau_2 - 1)^+$ markovské vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t^N, t \geq 0$.

   (c) $\tau_1, 2\tau_1$ markovské vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_{t\uparrow}^N, t \geq 0$.

6. Buď $N = (N_t, t \geq 0)$ Poissonův proces a $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$. Ukažte, že $\mathcal{F}_{\tau_1}^N = \sigma(\tau_1)$.

7. Nechť $X_n \sim R\{-1, 1\}$ jsou nezávislé dvouhodnotové náhodné veličiny. Označme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Rozhodněte, zda jsou následující časy $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$-markovské

   (a) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 5\}$.

   (b) $\nu = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n < -3\}$.

   (c) $\tau + \nu, \tau \wedge \nu + 1, \tau \vee \nu, \tau \vee \nu - 1, 2\tau - 1, \tau^2$.

---

1. Zobrazení $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pokud

$$[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T \quad \text{tj.} \quad \text{čítací proces} \quad 1_{[\tau \leq t]} \quad \text{je } \mathcal{F}_t\text{-adapovaný.}$$

2. Nechť τ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \ \forall\, t \in T \ \ A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\}$$

   je σ-algebra událostí do markovského času τ.

[1]Ukažte si doma, že $B \in \mathcal{G}_t$ právě tehdy, když existuje $C \in \mathcal{F}_t^N$ taková, že $B \triangle C := B \backslash C \cup C \backslash B \in \mathcal{N}$.